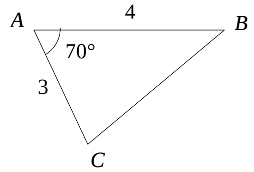
PRODUIT SCALAIRE



Exercice de motivation : ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 3$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 70°$. Problème : calculer BC.

On ne peut pas utiliser le théorème de Pythagore car le triangle n'est pas rectangle. On verra, à la fin de ce chapitre, que le produit scalaire offre une solution à ce problème en généralisant le théorème de Pythagore à tout triangle.

I) Définition du produit scalaire (euclidien) et conséquences

Définition 1

On se place dans une base **orthonormée** du plan. Soient $\vec{u}\,(x\,;y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y')$ deux vecteurs.

On appelle produit scalaire (euclidien) de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = x\,x' + y\,y'$$

Exemple : Avec $\vec{u}\,(1\,;2)$ et $\vec{v}\,(2\,;3)$, on obtient $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2 + 6 = 8$.

Remarques :

- $\vec{u}\cdot\vec{u} = x^2 + y^2 = \|\vec{u}\|^2$. On notera parfois (convention) $\vec{u}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2$.

  De même, si A et B sont deux points, on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2$ et on notera parfois $\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2$.

- Si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul alors le produit scalaire est nul. Mais attention, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ n'entraîne pas nécessairement ($\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$). (Considérer par exemple $\vec{u}\,(1\,;2)$ et $\vec{v}\,(2\,;-1)$ pour s'en convaincre)

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ($\vec{v} = k\,\vec{u}$) alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = x.kx + y.ky = k(x^2 + y^2) = k\,\|\vec{u}\|^2$.

Théorème 1 *Autres expressions du produit scalaire*

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
2. Lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u}, \vec{v})$
3. Lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}'$ où $\vec{v}'$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur la direction donnée par $\vec{u}$.

Démonstrations :

Notons $(x\,;y)$ et $(x'\,;y')$ les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a alors :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (x+x')^2+(y+y')^2 = x^2+2x\,x'+x'^2+y^2+2y\,y'+y'^2$$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = x^2+y^2+x'^2+y'^2+2\,(x\,x'+y\,y')$$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$$

D'où l'expression 1.

Supposons maintenant que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$:

Posons $\vec{i} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$. Soit $\vec{j}$ le vecteur tel que : $(\vec{i}\,,\vec{j}\,) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\|\vec{j}\,\| = 1$.

Ainsi, nous avons ainsi construit une base $(\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ orthonormale directe.

Dans cette base $(\vec{i}\,,\vec{j}\,)$, on a, en notant $\theta = (\vec{u}\,,\vec{v}\,)$:

$$\vec{u}\,(\|\vec{u}\|,\ 0),\quad \vec{v}\,(\|\vec{v}\|\cos\theta,\ \|\vec{v}\|\sin\theta) \text{ et } \vec{v}'\,(\|\vec{v}\|\cos\theta,\ 0)$$

D'où :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\theta \quad \text{et} \quad \vec{u}\cdot\vec{v}' = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\theta = \vec{u}\cdot\vec{v}$$

D'où les expressions 2 et 3.

<u>Exemples</u> : dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}\,,\vec{j}\,)$ on donne $A(1\,;1)$, $B(4\,;1)$ et $C(3\,;3)$.

Vérifier avec les quatre expressions du produit scalaire que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6$.

<u>Remarque</u> : cas de vecteurs colinéaires : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on a :

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ si et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens

$\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ si et $\vec{v}$ sont colinéaires sens opposés.

<u>Théorème 2</u>

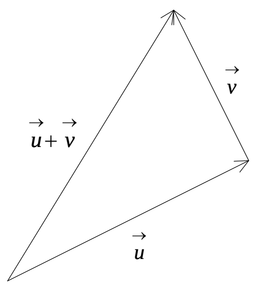
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont <u>orthogonaux</u> lorsque leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u}\perp\vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

<u>Démonstration</u> : d'après le théorème de Pythagore, on a les équivalences suivantes :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ orthogonaux} \iff \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2 \underset{\text{Expression 1}}{\overset{\text{Théorème 1}}{\iff}} 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

<u>Illustration</u> :



II) Propriétés du produit scalaire

<u>Symétrie</u> : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$

<u>Bilinéarité</u> (linéarité par rapport aux deux variables) :

$(\vec{u}+\vec{v})\,.\,\vec{w} = \vec{u}\,.\,\vec{w} + \vec{v}\,.\,\vec{w}$ et $(\lambda\,\vec{u})\,.\,\vec{v} = \lambda\,\vec{u}\,.\,\vec{v}$ (linéarité par rapport à la première variable)

$\vec{u}\,.\,(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$ et $\vec{u}\,.\,(\lambda\,\vec{v}) = \lambda\,\vec{u}\,.\,\vec{v}$ (linéarité par rapport à la seconde variable)

<u>Démonstration</u> :

Symétrie : évident d'après la définition.

Bilinéarité : notons $(x\,;y)$, $(x'\,;y')$ et $(x''\,;y'')$ les coordonnées respectives de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

- $(\vec{u}+\vec{v})\,.\,\vec{w} = (x+x')\,x'' + (y+y')\,y'' = x\ x'' + x'\ x'' + y\ y'' + y'\ y''$

  $= x\ x'' + y\ y'' + x'\ x''\ y'\ y'' = \vec{u}\,.\,\vec{w} + \vec{v}\,.\,\vec{w}$

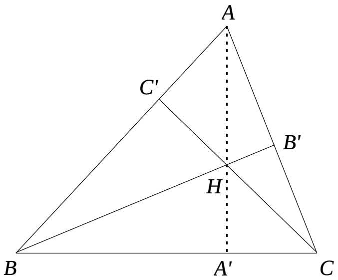
- $(\lambda\,\vec{u})\,.\,\vec{v} = \lambda x\,x' + \lambda y\,y' + \lambda z\,z' = \lambda(x\,x' + y\,y' + z\,z')$

La symétrie livre la linéarité par rapport à la seconde variable.

<u>Exemple</u> : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB}\,.\,\overrightarrow{BD}$

<u>Application</u> : retrouver, à l'aide du produit scalaire, le fait que les hauteurs d'un triangle ABC sont concourantes.

Notons A', B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A, B et C sur (BC), (AC) et (AB) et $H = (BB') \cap (CC')$.



On a clairement : $\overrightarrow{BH}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0$ et $\overrightarrow{CH}\,.\,\overrightarrow{AB} = 0$

On peut donc écrire : $\overrightarrow{BH}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CH}\,.\,\overrightarrow{AB}$

Introduisons le point A : $(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH})\,.\,\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH})\,.\,\overrightarrow{AB}$

En développant : $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}\,.\,\overrightarrow{AB}$

Or : $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{AB}$

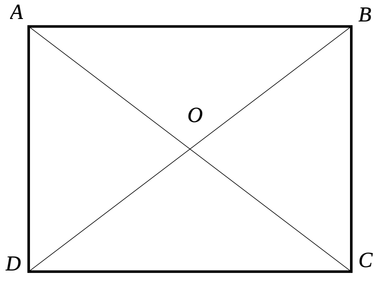
Il reste : $\overrightarrow{AH}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}\,.\,\overrightarrow{AB}$

En regroupant : $\overrightarrow{AH}\,.(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{AH}\,.\,\overrightarrow{BC} = 0$.

Les droites (AH) et (BC) sont donc perpendiculaires, donc (AH) est bien la hauteur issue de A.

Donc les 3 hauteurs du triangle sont concourantes en A.



<u>Exercice</u> : $ABCD$ est un rectangle de centre O tel que $AB = 4$ et $BC = 3$.

Calculer $\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{DB}$.

$\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\,.\,\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{DB} = AB^2 - BC^2 = 7$.

Règle pratique : pour calculer un produit scalaire, on peut décomposer un vecteur (ou les deux) suivants des directions orthogonales.

III) Identités remarquables

Théorème 3 :

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$$
$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$$
$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

Démonstration : évident. (On utilise la linéarité et la symétrie du produit scalaire)

Applications :

1) Identité du parallélogramme : $(\vec{u}+\vec{v})^2 + (\vec{u}-\vec{v})^2 = 2(\vec{u}^2 + \vec{v}^2)$

(Si $ABCD$ est un parallélogramme, en posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, on obtient une relation entre les diagonales et les côtés du parallélogramme : $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$ ce qui est bien pratique)

2) Inégalité triangulaire : comme $\vec{u}\cdot\vec{v} \leqslant \|\vec{u}\|\,.\,\|\vec{v}\|$ ($\cos\theta \leqslant 1$), on a :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 \leqslant \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\,.\,\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$$

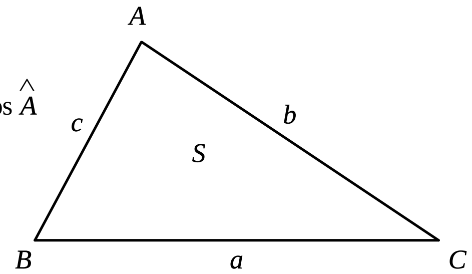
D'où :
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 \leqslant (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$$

Et comme la fonction racine carrée et croissante, et tenant compte de la relation $\sqrt{A^2} = |A|$, on obtient :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

IV) Applications du produit scalaire en géométrie

1) Formule d'Al-Kashi (XIV$^{\text{ème}}$) (dite encore de "Pythagore généralisé")



Soit ABC un triangle quelconque. On notera (par abus) $\cos A$ au lieu de $\cos \widehat{A}$

On a :

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$

Démonstration :

$$a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Application : solution du problème de motivation :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = 9 + 16 - 2\times 3\times 4\cos 70 \simeq 16{,}79 \text{ d'où } BC \simeq 4{,}10 \text{ (à } 10^{-2} \text{ près)}$$

2) Équation d'une droite perpendiculaire à une autre :

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, considérons donnée une droite (AB) avec $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$.

Soit $C(x_C\,;\,y_C)$ un point distinct de A et B. Comment trouver une équation de la droite Δ perpendiculaire à (AB) et passant par C ?

Soit $M(x\,;\,y)$ un point quelconque du plan. On utilise la caractérisation suivante : $M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.

Exemple : trouver les coordonnées de l'orthocentre d'un triangle et les coordonnées du cercle du centre circonscrit à un triangle.

3) Équation d'un cercle

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, comment trouver une équation d'un cercle $\mathscr{C}$?

Cas 1 : on connaît le centre $\Omega(x_0\,;\,y_0)$ et le rayon r du cercle $\mathscr{C}$.

Soit $M(x\,;\,y)$ un point quelconque du plan. On utilise la caractérisation suivante : $M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \Omega M = r$.

Or, $\Omega M^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ d'où une équation de $\mathscr{C}$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Cas 2 : on connaît deux points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ du cercle $\mathscr{C}$ qui sont diamétralement opposés.

Soit $M(x\,;\,y)$ un point quelconque du plan. On utilise la caractérisation suivante : $M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$.

Exemple : trouver une équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(0\,;\,4)$ et $B(4\,;\,0)$.

4) Formules de la médiane

Soit MAB un triangle et I le milieu de $[AB]$. On a alors :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

$$MA^2 - MB^2 = 2\,\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

Ces formules ne sont pas à connaître pas cœur. Par contre, on doit savoir les retrouver en utilisant des carrés scalaires et le milieu I de $[AB]$. Pour des applications de ces formules, voir le document "lieux géométriques" où l'on déterminer un certain nombre de lignes de niveau.

Preuve :

$$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 2MI^2 + 2\,\overrightarrow{MI}\cdot(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + IA^2 + IB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

$$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 2\,\overrightarrow{MI}\cdot(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) = 2\,\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

Exemple :

$MA = 5$; $MB = 3$ et $AB = 6$. Alors $MI = 2\sqrt{2}$.

Application : soit M un point situé à l'intérieur d'un rectangle $ABCD$. Démontrer que :

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$$

Notons O le centre du rectangle. D'après la formule de la médiane appliquée au triangle MAC, on a :

$$MA^2 + MC^2 = 2MO^2 + \frac{1}{2}AC^2$$

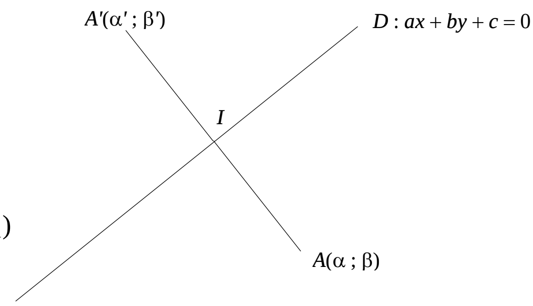
De même, dans le triangle MBD : $$MB^2 + MD^2 = 2MO^2 + \frac{1}{2}BD^2$$

Et comme $AC = BD$, il vient : $$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$$

5) <u>Symétrique d'un point par rapport à une droite</u>

Soient D une droite d'équation $ax + by + c = 0$, $A(\alpha\ ;\ \beta)$ un point du plan et A' le symétrique de A par rapport à D.

Exprimer les coordonnées de A' en fonction de a, b, c, α et β.



Notons $(\alpha'\ ;\ \beta')$ les coordonnées de A'.

Nous savons qu'un vecteur directeur $\vec{u}$ de D est $\vec{u}\,(-b\ ;\ a)$.

Comme les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont orthogonaux, on a :

$$-b(\alpha' - \alpha) + a(\beta' - \beta) = 0$$

C'est-à-dire : $$-b\alpha' + a\beta' = -b\alpha + a\beta \quad (E_1)$$

Par ailleurs, le point I, milieu de $[AA']$ est sur D donc :

$$a\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2}\right) + b\left(\frac{\beta + \beta'}{2}\right) + c = 0$$

C'est-à-dire : $$a\alpha' + b\beta' = -a\alpha - b\beta - 2c \qquad (E_2)$$

On résout le système constitué des équations (E_1) et (E_2) (d'inconnues α' et β') en effectuant $a(E_1) + b(E_2)$:

$$(a^2 + b^2)\beta' = -2ab\alpha + (a^2 - b^2)\beta - 2bc$$

Comme a et b ne sont pas tous deux nuls, $a^2 + b^2$ n'est pas nul d'où :

$$\beta' = \frac{-2ab\alpha + (a^2 - b^2)\beta - 2bc}{a^2 + b^2}$$

De même, l'opération $b(E_1) - a(E_2)$ donne :

$$(-b^2 - a^2)\alpha' = (-b^2 + a^2)\alpha + 2ab\beta + 2ac$$

D'où : $$\alpha' = \frac{(b^2 - a^2)\alpha - 2ab\beta - 2ac}{a^2 + b^2}$$

<u>Trois cas particuliers</u> :

- droite horizontale $y = k$ ($a = 0$, $b = 1$, $c = -k$), on trouve :

$$\alpha' = \alpha \text{ et } \beta' = -\beta + 2k$$

- droite verticale $x = \lambda$ ($a = 1$, $b = 0$, $c = -\lambda$), on trouve :

$$\alpha' = -\alpha + 2\lambda \text{ et } \beta' = \beta$$

- "première bissectrice" $y = x$ ($a = 1$, $b = -1$, $c = 0$), on trouve :

$$\alpha' = \beta \text{ et } \beta' = \alpha$$